

Mẹo tìm nhanh đạo hàm một vài hàm số hữu tỷ

Ngô Đình Học
January 13, 2018

Vừa qua tôi đã viết một bài tương đối dài về [phương pháp giải một bài toán nhỏ trong vòng 3 giây](#) theo cách không cần nhớ công thức mà vẫn cho ra kết quả đúng như khi áp dụng công thức. Thực ra, bài toán 3 giây chỉ là một bệ phóng để tôi đưa ra một phương pháp học không cố nhớ mà vẫn nhớ, tỏ vẻ nhớ nhưng thực ra không nhớ chút nào. Trong võ thuật, thế võ như thế gọi là vô chiêu vì người học võ thấm nhuần rồi sẽ tung chiêu theo phản xạ một cách nhanh chóng chứ không còn nhớ theo chiêu thức nữa. Trong việc học, nhất là các môn khoa học tự nhiên như toán lý, muốn luyện được vô chiêu thì ta phải chia việc học ra làm 3 giai đoạn như mô tả trong bài viết đã nêu. Để làm quen với vô chiêu pháp, trong bài viết đã kể tôi đề nghị hai bài tập nhỏ và hứa sẽ cho biết đáp án sau. Do đó, bài này được viết để thực hiện lời hứa đó.

A. Bài toán thứ 1

Tìm đạo hàm của hàm số hữu tỉ sau đây:

$$y = \frac{3x + 2}{2x + 5} \quad (1)$$

Bài toán này rất đơn giản. Nhiều người đã biết công thức để tính đạo hàm của hàm số này rồi từ các sách toán giải tích. Tuy nhiên, ta cứ phải giải lại theo 3 bước để luyện vô chiêu như sau.

a. Bước 1: Cách giải căn bản là dùng công thức tính đạo hàm của thương số

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (2)$$

Áp dụng công thức:

- $u = 3x + 2 \Rightarrow u' = 3$
- $v = 2x + 5 \Rightarrow v' = 2$

Thế vào (2) và rút gọn:

$$y' = \frac{11}{(2x + 5)^2} \quad (3)$$

b. Bước 2: Cách giải tổng quát là dùng các hệ số a, b, c, d

Cứ tiến hành giải tỉ mỉ như bước 1, kết quả sẽ là:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} \quad (4)$$

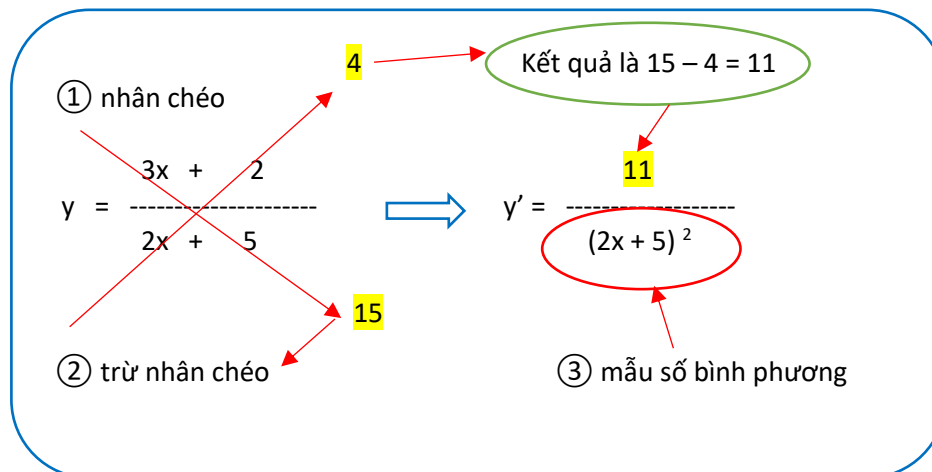
c. Bước 3: Tìm phương pháp giải vô chiêu

Dựa vào công thức (4), ta hãy tìm ra phương pháp nhớ cách tính toán nhưng hãy quên đi các biến số, chỉ nhớ vị trí của chúng và cách ta phải hành động như thế nào đối với vị trí của chúng.

Nhận xét về đáp số (4):

- Mẫu số có được là do bình phương mẫu số cũ
- Tử số $ad - bc$ là do nhân chéo trừ nhân chéo các hằng số của hàm số y

Tại sao gọi là nhân chéo? Đó là vì ta nhân hai đại lượng nằm theo đường chéo như hình vẽ sau đây:



Tóm lại, khẩu quyết vô chiêu cho tử số là: **nhân chéo trừ nhân chéo.**

Khi áp dụng cụ thể:

- Lấy tay quẹt theo hướng mũi tên theo thứ tự ①, ②.
- Với mỗi mũi tên, trong óc làm toán nhân chéo nhưng ngoài miệng thì đọc kết quả của toán nhân. Đừng nói nhiều làm rối trí.

Cụ thể,

- Khi quẹt chéo ①, ngoài miệng đọc 15
- Trước khi quẹt chéo ②, đọc “trừ”
- Sau đó, quẹt chéo ②, ngoài miệng đọc 4
- Làm nhẩm toán trừ trong óc, xong đọc: ra 11
- Rồi ghi kết quả 11 ở tử số như hình vẽ
- Còn mẫu số thì luôn luôn là bình phương nên không có gì đáng nói.

B. Bài toán thứ 2

Tìm đạo hàm của hàm số hữu tỉ sau đây:

$$y = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 5x + 7} \quad (5)$$

a. **Bước 1: Cách giải căn bản là dùng công thức tính đạo hàm thương số như bài toán 1**

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (6)$$

Áp dụng:

- $u = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow u' = 6x + 2$
- $v = 2x^2 + 5x + 7 \Rightarrow v' = 4x + 5$

Thế vào (6) và sau một hồi tính toán, rút gọn thì đáp số sẽ là:

$$y' = \frac{11x^2 + 38x + 9}{(2x^2 + 5x + 7)^2} \quad (7)$$

b. **Bước 2: Cách giải tổng quát là dùng các hệ số a, b, c, d**

Cứ tiến hành giải như bước 1. Sau khi tính toán dài dòng, kết quả sẽ là:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p} \Rightarrow y' = \frac{(an - mb)x^2 + 2(ap - mc)x + (bp - nc)}{(mx^2 + nx + p)^2} \quad (8)$$

c. **Bước 3: Tìm phương pháp giải vô chiêu**

Dựa vào công thức (8), nhưng hãy quên đi các biến số, hãy tìm cách nhớ vị trí và hành động theo vị trí.

Đáp số (8) có thể viết dưới dạng tổng quát là

$$y' = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(mx^2 + nx + p)^2} \quad (9)$$

với:

$$A = an - mb \quad (10)$$

$$B = 2(ap - mc) \quad (11)$$

$$C = bp - nc \quad (12)$$

Bây giờ ta chỉ tìm ra qui luật tính A, B, C cho dễ nhớ mà thôi. Để làm được việc này, tôi đã cố ý sắp xếp a, b, c, m, n, p trong công thức (10-12) theo một thứ tự như sau:

- Khi đối chiếu công thức (10) với vị trí các hằng số của y trong (8), ta thấy rõ A chính là kết quả của nhân chéo trừ nhân chéo. Đó là khẩu quyết ta đã học được từ bài toán thứ nhất.
- Khi đối chiếu công thức (11) với vị trí các hằng số của y trong (8), ta thấy rõ B chính là kết quả của nhân chéo trừ nhân chéo rồi nhân đôi.
- Khi đối chiếu công thức (12) với vị trí các hằng số của y trong (8), ta thấy rõ C chính là kết quả của nhân chéo trừ nhân chéo.

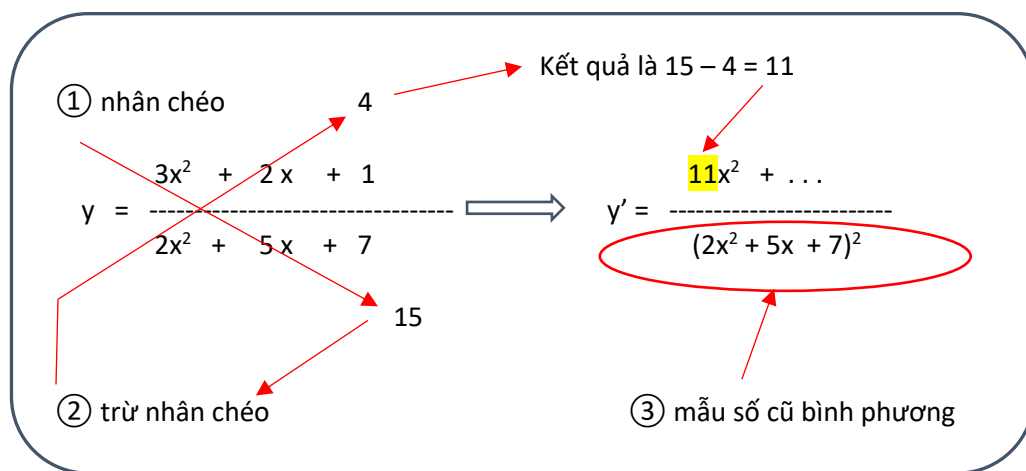
Như vậy là ta đã phát hiện ra khẩu quyết vô chiêu. Đó là 3 lần áp dụng khẩu quyết nhân chéo trừ nhân chéo. Bây giờ chỉ còn liệt kê quá trình tính toán như sau:

- Hãy nhìn vào tử số của hàm số y ở (5): có tất cả 3 số hạng là $3x^2$, $2x$, và 1.
- Lần lượt áp dụng khẩu quyết nhân chéo trừ nhân chéo cho từng số hạng từ trái qua phải.

1) Muốn tìm A, xuất phát từ số hạng đầu tiên là $3x^2$

- Nhân chéo với số hạng gần nhất ở mẫu số là $5x$ (chỉ nhân hằng số mà thôi):
(3 nhân 5) trừ (2 nhân 2) = 11
- Mẫu số vẫn là mẫu số nguyên thủy bình phương như hình minh họa.

Bây giờ, ta hãy nhớ bằng hành động chứ đừng nhớ công thức. Ta vừa lấy tay quẹt theo các mũi tên chỉ dẫn, vừa đọc tích số của khẩu quyết nhân chéo. Chẳng hạn, hình vẽ sau đây minh họa cách tính:



- Đầu tiên, quẹt theo mũi tên số ① thì miệng đọc là 15 (do 2 nhân 5)
- Rồi trước khi quẹt theo mũi tên số ② thì miệng đọc là “trừ”
- Sau đó, quẹt theo mũi tên số ② thì miệng đọc là 4
- Làm toán trừ nhẩm trong óc, xong đọc kết quả là 11
- Đó là hằng số A mà ta cần tính. Ghi số 11 vào tử số như hình vẽ.

2) Muốn tìm B, ta vẫn xuất phát từ $3x^2$ nhưng nhân chéo với số xa hơn ở mẫu số (tức số 7)

- Nhân chéo trừ nhân chéo là: (3 nhân 7) trừ (2 nhân 1) = 19
- Vì khởi hành lần thứ nhì từ $3x^2$, đem kết quả 19 nhân với 2 (chỉ là mẹo nhớ thôi)
- Kết quả được 38. Đó là hằng số B cần ghi xuống như hình vẽ

① nhân chéo

② trừ nhân chéo

Kết quả là $21 - 2 = 19$
 Nhân 2 vì đi từ số $3x^2$ lần thứ 2
 Kết quả cuối cùng là 38

$$y = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 5x + 7} \Rightarrow y' = \frac{11x^2 + 38x + \dots}{(2x^2 + 5x + 7)^2}$$

3. Muốn tìm C, ta phải di chuyển đến số hạng thứ nhì (tức $2x$) ở tử số

- Áp dụng khẩu quyết nhân chéo trừ nhân chéo: (2 nhân 7) trừ (5 nhân 1) = 9
- Đối với $2x$, đây là khởi hành lần thứ nhất nên không cần nhân 2.
- Kết quả được 9. Đó là hằng số C cần ghi xuống như hình minh họa

① nhân chéo

② trừ nhân chéo

Kết quả là $14 - 5 = 9$

$$y = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 5x + 7} \Rightarrow y' = \frac{11x^2 + 38x + 9}{(2x^2 + 5x + 7)^2}$$

C. Thay lời kết luận

Các bạn hãy thực tập bài toán thứ nhì vài lần cho quen khẩu quyết nhân chéo trừ nhân chéo. Các bạn sẽ thấy phương pháp vô chiêu rất nhanh và dễ kiểm chứng đáp số so với cách tính thủ công dài dòng. Phương pháp vô chiêu cho phép ta tìm ra đáp số chỉ với một dấu bằng mà thôi, nghĩa là từ đề bài đến đáp số chỉ cần có một dấu bằng là viết ra kết quả liền.

Chú ý bài toán thứ nhì có 3 khẩu quyết nhân chéo trừ nhân chéo. Khẩu quyết nhân chéo trừ nhân chéo thứ nhì phải nhân đôi kết quả vì xuất phát lần thứ nhì ở cùng một địa điểm như khẩu quyết thứ nhất.

Các bạn có nhận thấy bài toán thứ nhất chẳng qua là dạng đặc biệt của bài toán thứ nhì khi các hệ số của x^2 trở thành zero. Do đó, từ 3 khẩu quyết nhân chéo trừ nhân chéo, bài toán thứ nhất chỉ còn có một khẩu quyết nhân chéo trừ nhân chéo mà thôi.

Trong thực tế, bạn có thể gặp bài toán thứ nhì với vài số hạng bằng không, chẳng hạn:

$$y = \frac{3x - 5}{2x^2 + 5x + 1}$$

Muốn áp dụng phương pháp vô chiêu, bạn phải sắp xếp lại các số hạng theo đúng vị trí: trước hết là số x^2 , kế tiếp là số x , cuối cùng là hằng số. Chẳng hạn, đối với bài toán vừa nêu:

$$y = \frac{0x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 5x + 1} \Rightarrow y' = \frac{-6x^2 + 20x + 28}{(2x^2 + 5x + 1)^2}$$

Dĩ nhiên, muốn làm rất nhanh thì hãy sắp xếp lại trong đầu chứ đừng viết ra, rồi áp dụng khẩu quyết nhân chéo trừ nhân chéo.

Bây giờ hãy áp dụng vô chiêu cho bài toán hơi phức tạp hơn một chút:

$$y = \frac{3\sin(x) - 5}{2\sin^2(x) + 5\sin(x) + 1} \Rightarrow y' = \frac{(-6\sin^2(x) + 20\sin(x) + 28)\cos(x)}{(2\sin^2(x) + 5\sin(x) + 1)^2}$$

Trong bài trên, ta đã xem $\sin(x)$ là u , rồi cứ lấy đạo hàm bình thường như thể u là x vậy. Cuối cùng, ta nhân kết quả với u' tức $\cos(x)$ để được đáp số.

Chúc các bạn dựa theo các hình vẽ trong bài này để luyện thành công phương pháp vô chiêu cho hai bài toán đạo hàm trên đây. Sau khi quen, các bạn hãy áp dụng phương pháp giải 3 bước vào cách tính các tích phân và cách giải các phương trình vi phân, rồi tìm ra vô chiêu cho chính mình. Khi chính các bạn tìm ra cách nhớ vô chiêu cho mình thì các bạn sẽ nhớ lâu hơn.